L'option facultative "**Maths expertes**"

Public concerné

Elèves de terminale,

ayant suivi l'enseignement de spécialité en première,

poursuivant cet enseignement en terminale,

dont le projet d'orientation est en rapport avec les mathémtiques

Horaire hebdomadaire

3 heures :
- 1 séance de 1 heure
- une séance de 2 heures

Evaluation

Elle donne lieu à une moyenne dans chaque bulletin trimestriel , et entre donc pour le baccalauréat, au même titre que les autres matières, dans le calcul de la moyenne des bulletins (10% de la note finale)

Pas d'épreuve finale

Intentions majeures

D'après le BO :

L'enseignement optionnel de mathématiques expertes est destiné aux élèves qui ont ***un goût affirmé*** *pour les mathématiques et qui visent des* ***formations où les mathématiques occupent une place prépondérante****. Il permet d'aborder de façon approfondie d'autres champs d'étude que ceux proposés par l'enseignement de spécialité.*

Les objectifs sont les suivants :

- Permettre à chaque élève de ***consolider les acquis*** de l'enseignement de spécialité de première, de ***développer son goût des mathématiques***, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la ***maîtrise de l'abstraction*** ;

- Développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;

- Préparer aux études supérieures.

3 thèmes

- Les **nombres complexes**, vus comme objets algébriques et géométriques ;

- L'**arithmétique** ;

- Les **matrices** et les graphes.

L'enseignement de "maths expertes" est optionnel et facultatif ...

... mais il nécessite un travail d'apprentissage et d'entraînement rigoureux et régulier.

L'option "maths expertes" se fait en **petit groupe** d'élèves motivés par les mathématiques...

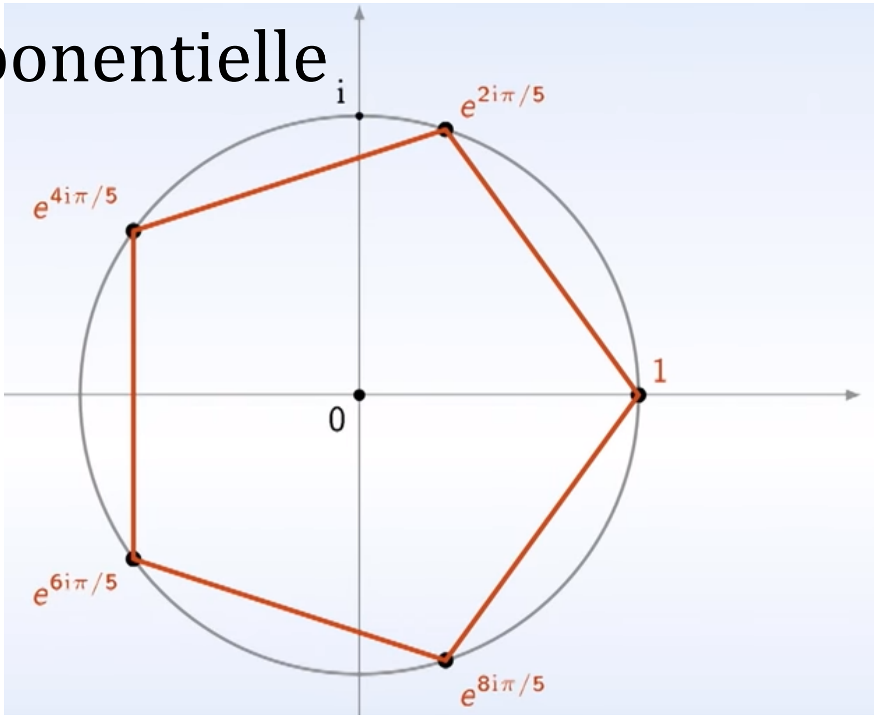
Thème 1
Les nombres complexes

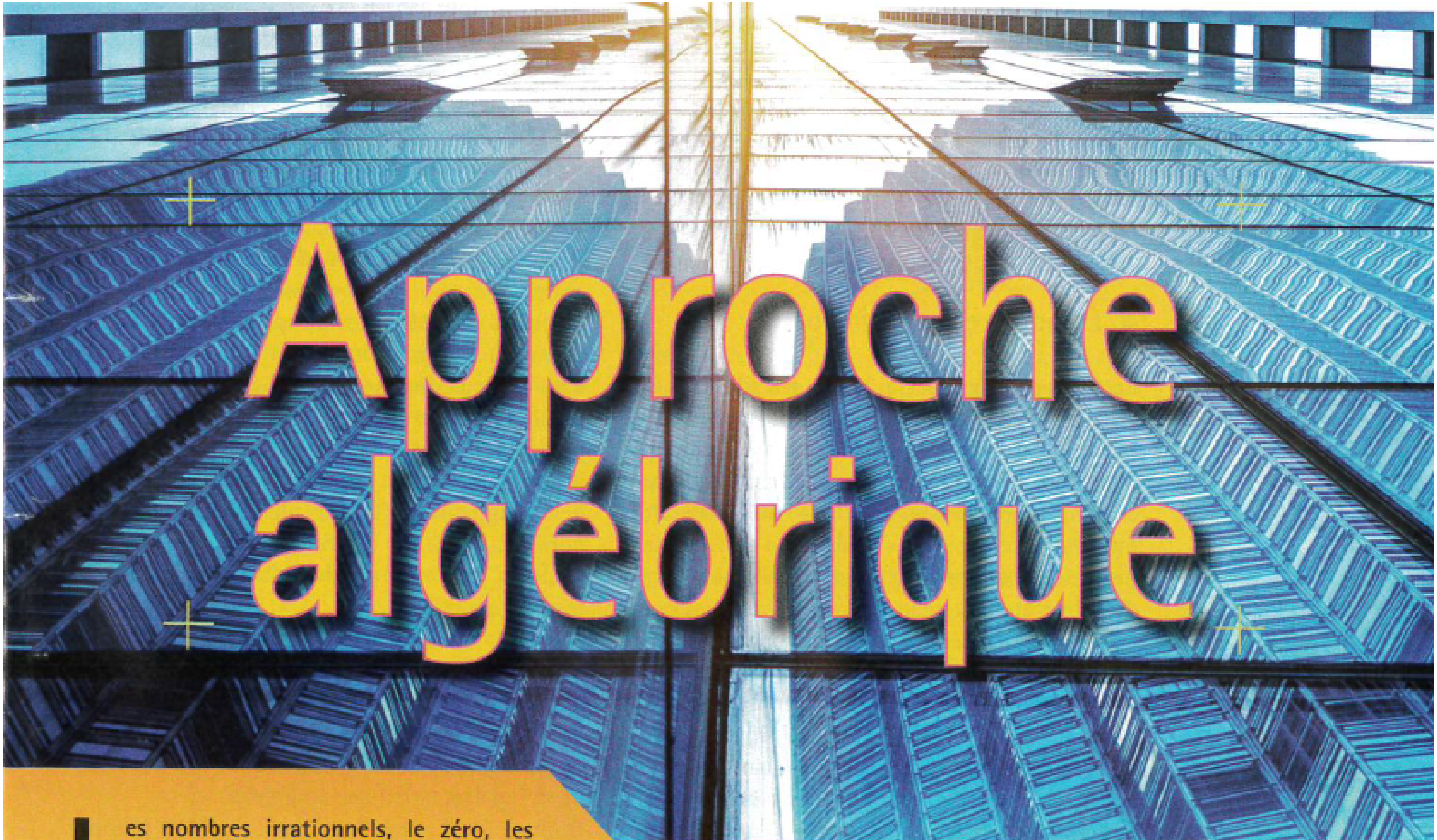
Définition des nombres complexes
Opérations sur ces nombres (somme, produit, inverse)
Résolutions d’équations

$$i^2 = -1$$

Représentation des nombres complexes
Utilisation en géométrie
Lien avec la trigonométrie et l’exponentielle

EULER





Approche algébrique

Les nombres irrationnels, le zéro, les nombres négatifs ont mis des siècles à être acceptés. Ce fut également le cas des « imaginaires », qui ont donné naissance à la notion de nombres complexes. À l'origine de leur – tardive – introduction, il y avait le souhait de résoudre les équations du deuxième degré qui n'avaient pas de solution réelle. Cela a débouché sur la conception d'un ensemble puissant, possédant la structure de corps algébriquement clos, c'est-à-dire dans lequel toute équation algébrique admet une solution. Mieux, dans la mesure où les complexes peuvent être identifiés à un point du plan, une puissante correspondance entre algèbre, analyse, géométrie et trigonométrie allait naître !

Thème 2
L'arithmétique

C'est l'étude des **propriétés des nombres entiers**

- Divisibilité dans l'ensemble des entiers relatifs Z (diviseurs, multiples, division euclidienne, congruences, PGCD, propriétés, théorèmes de Bézout et de Gauss)

- Nombres premiers (démonstration qu'il en existe une infinité, décomposition d'un entier en facteurs premiers, petit théorème de Fermat)

On ne travaille qu'avec des nombres entiers ...
Donc cela parait facile au début...

Mais il faut avoir une bonne connaissance des tables et bien maitriser le sens des opérations élémentaires, notamment la multiplication et par extension par la suite ... les puissances.

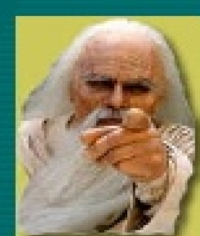
Il faut aussi avoir une bonne matrise du calcul littéral.

C'est enfin l'occasion d'utiliser
des types de raisonnements variés. (raisonnement par l'absurde, par disjonction des cas, ...)

Quelques exemples d'applications :

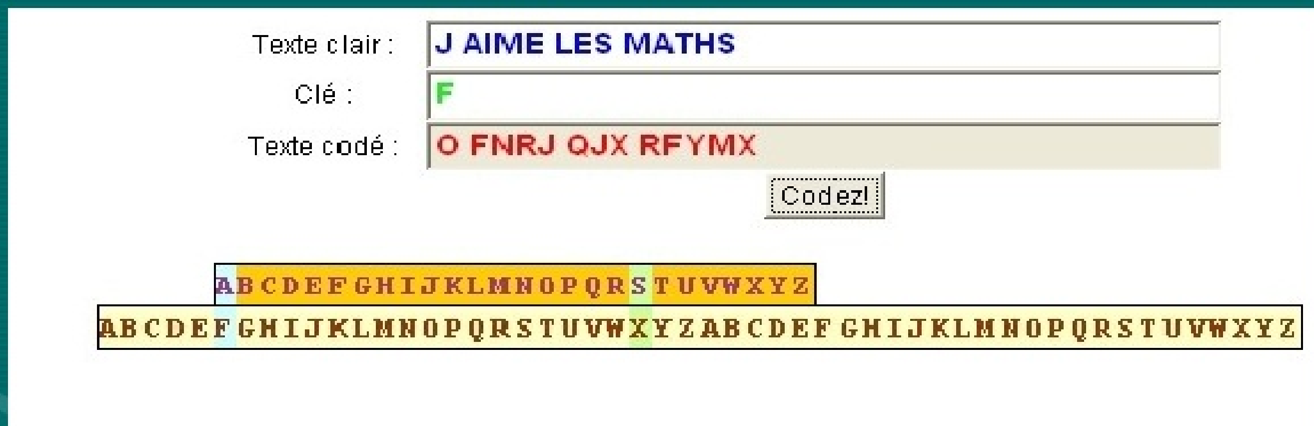
Gagner à tout coup contre le maître du jeu

Le but du jeu est simple, 20 bâtonnets sont alignés parallèlement entre toi et le maître du jeu. Chacun à votre tour, vous pouvez prendre 1, 2 ou 3 bâtonnets à chaque fois.<u>Celui qui ramasse le dernier bâtonnet a perdu</u> !



Commencez !…

Une autre application : comprendre un codage



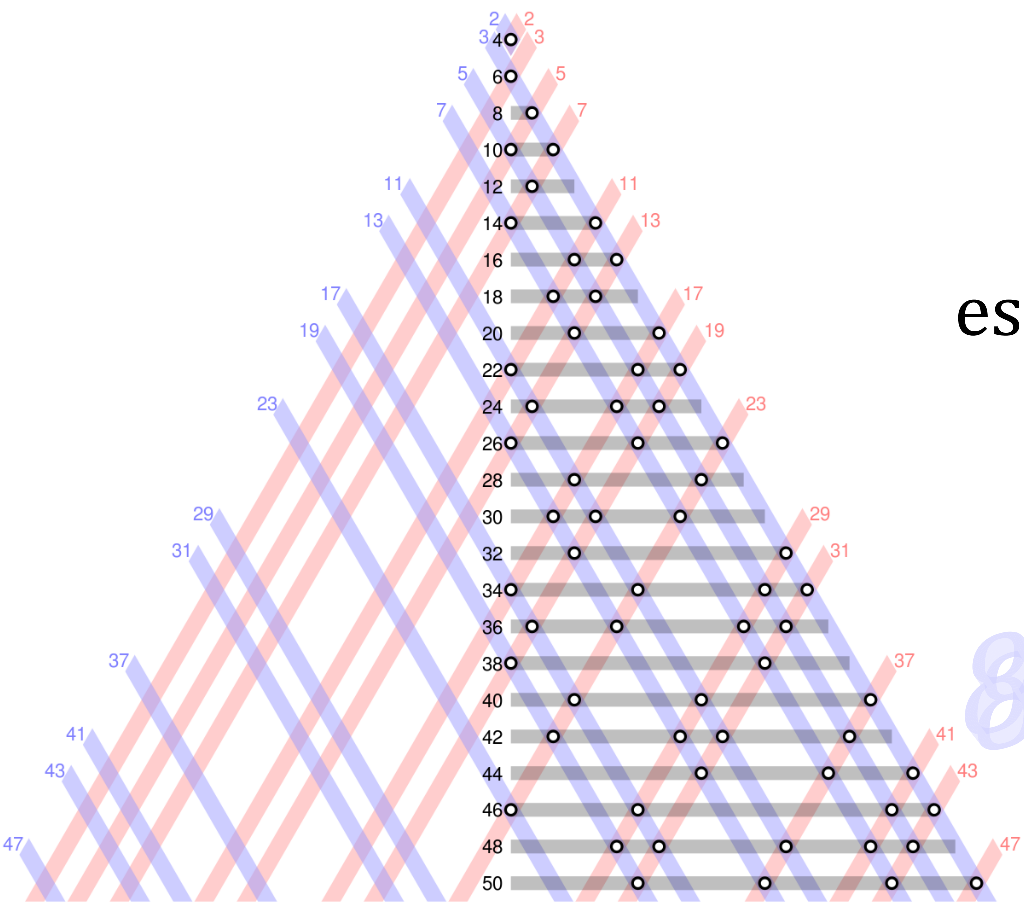
La réglette de Saint-Cyr (utilisée fin XIX^{ème} siècle)

Avec de nombreuses applications en cryptage...

Et aussi beaucoup de conjectures non démontrées...

$4 = 2 + 2$

Conjecture de Golbach



→ Tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers

$8 = 5 + 3$

$42 = 23 + 19$

→ Il existe une infinité de couples
de **nombres premiers jumeaux**
(nombres premiers qui ne diffèrent que de 2,
par exemple, 11 et 13, 17 et 19, …)

→ Il existe une infinité de **nombres parfaits**
(nombres égaux à la somme de leurs diviseurs propres
(différents de 1 et du nombre lui-même,
par exemple, 6 =1+2+3)

Thème 3
Les matrices et les graphes

Notion de matrices (tableau de nombres)
Opérations sur les matrices (somme, produit, inverse, puissances)
Applications : systèmes, suites récurrentes, …

Notion de graphes et de chaînes de Markov
Applications : représentation d'un réseau social, marche aléatoire sur un carré ou un tétraèdre, modèle d'Ehrenfest pour la diffusion des gaz, …

Première application : Le système $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-2y=-8 \end{cases}$

peut être représenté par les écritures matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Cela n'a peut-être pas beaucoup d'intérêt
pour un système a deux inconnues …

Mais pour un système à 3 ou 4 inconnues,
voire plus encore ...

$$\begin{cases} -3{,}375\,x + 2{,}25\,y - 1{,}5\,z + t = 2 \\ 6{,}75\,x - 3\,y + z = 1 \\ -0{,}125\,x + 0{,}25\,y - 0{,}5\,z + t = 2{,}5 \\ 0{,}75\,x - y + z = 0 \end{cases}$$

Une deuxième application du calcul matriciel : <u>les suites récurrentes</u>

Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, cette évolution par $b_0 = 1\,000$, $c_0 = 1\,500$ et pour tout entier naturel n,

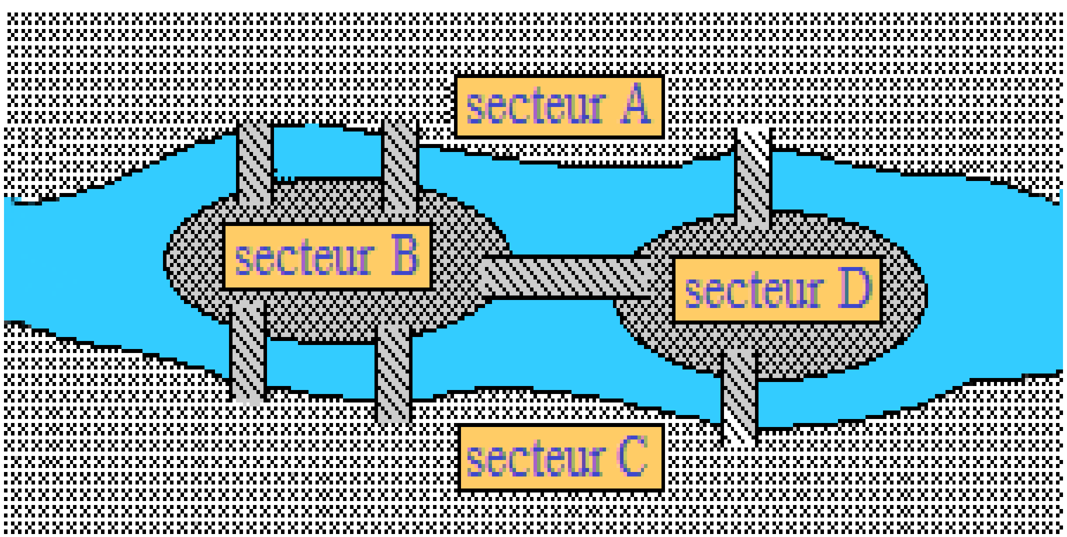
$$\begin{cases} b_{n+1} = 0{,}3b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+1} = -0{,}5b_n + 1{,}3c_n \end{cases}$$

où b_n représente le nombre de buses et c_n le nombre de campagnols le 1er juin de l'année $2017 + n$.

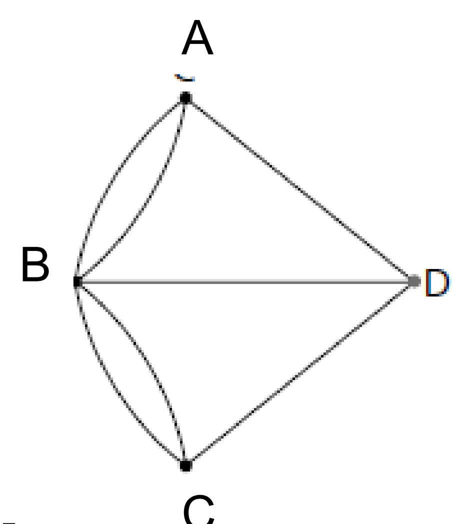
Une dernière application : <u>les graphes</u>

Par exemple, **<u>Problème des ponts de Königsberg</u>**
(posé par Euler en 1735)

Partant d'un point de la ville, peut-on se promener, en revenant à son point de départ,
en passant une seule fois par tous les ponts ?



Le problème peut se traduire par le graphe ci-contre :



Et on montre alors qu'un tel parcours est impossible…